Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 03.02.2014.

Pismeni ispit iz Inžinjerske matematike III

Pravila: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Riješiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} -\dot{x} - x + \dot{y} &= -e^t \\ \dot{x} - x + y &= e^{2t} \end{aligned}$$

2. Odrediti Laplasovu transformaciju funkcije $f(t) = 3t^3 \sin 3t + 2t^2 e^{-4t}$.

3. Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 10 i 11 sati. Onaj koji prvi dođe čekaće 15 minuta, poslije čega odlazi. Kolika je vjerovatnoća da će se prijatelji susresti?

4. Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću *slučajnog šuma*, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(50%) (a) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(50%) (b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 10,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti za slučaj kada je sredina uzorka 7,8.

(#) Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda riješiti sljedeći sistem

$$-\dot{x} - x + \dot{y} = -e^{t}$$
$$\dot{x} - x + y = e^{2t}$$

Rj.

$$(-D-1)x + Dy = -e^{t}$$
$$(D-1)x + y = e^{2t} \quad /D$$

$$(-D-1)x + Dy = -e^{t} \quad \ldots (I)$$
$$(D^2-D)x + Dy = 2e^{2t} \quad \ldots (II)$$

$$(I)-(II): \quad (-D - 1 - D^2 + D)x = -e^{t} - 2e^{t} \quad /\cdot(-1)$$

$$(D^2+1)x = e^{t} + 2e^{t}$$

$$\ddot{x} + x = e^{t} + 2e^{t}$$

ovo je linearna diferenc. jednačina drugog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$x = x_h + x_p$$

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1$$

Prisjetimo se: Ako je $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ tada je $y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

$$x_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Primjetimo da se izrazi e^{t} i e^{2t} ne pojavljuju u homogenom rješenju, pa je

$$x_p = Ae^{t} + Be^{2t} \Rightarrow \dot{x}_p = Ae^{t} + 2Be^{2t} \Rightarrow \ddot{x}_p = Ae^{t} + 4Be^{2t}$$

$$\ddot{x}_p + x_p = e^t + 2e^{2t}$$

$$2Ae^t + 5Be^{2t} = e^t + 2e^{2t} \quad \Rightarrow \quad 2A = 1 \; ; \quad 5B = 2$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{2}{5}$$

$$x_p = \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{5}e^{2t}$$

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{5}e^{2t}$$

Sad $y(t)$ nije teško odrediti iz druge jednačine

$$\dot{x} - x + y = e^{2t}$$

$$-C_1\sin t + C_2\cos t + \cancel{\frac{1}{2}e^t} + \frac{4}{5}e^{2t} - C_1\cos t - C_2\sin t - \cancel{\frac{1}{2}e^t} - \frac{2}{5}e^{2t} +$$
$$+\, y = e^{2t}$$

$$y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t}$$

Rešenje sistema je

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{5}e^{2t} \\ y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t} \end{cases}$$

(#) Odrediti Laplasovu transformaciju f-je

$$f(t) = 3t^3 \sin 3t + 2t^2 e^{-4t}$$

Rj. Znamo da je $\underline{\mathcal{L}\{e^{\alpha t} t^n\}(s) = \frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}}$ (prema tabeli osnovnih Laplasovih transformacija), pa je

$$\mathcal{L}\{2t^2 e^{-4t}\}(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-4t} t^2\} = 2 \cdot \frac{2!}{(s+4)^3} = \frac{4}{(s+4)^3}$$

Iz osobina Laplasovih transformacija

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)}$$

Kako je $\mathcal{L}\{\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s^2+9}$ to je

$$\mathcal{L}\{3t^3 \sin 3t\} = 3\mathcal{L}\{t^3 \sin 3t\} = 3(-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = 3\left((s^2+9)^{-1}\right)' = 3(-1)(s^2+9)^{-2} \cdot 2s = (-6)\frac{s}{(s^2+9)^2}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'' = (-6)\left(\frac{s}{(s^2+9)^2}\right)' = (-6)\frac{1 \cdot (s^2+9)^2 - s \cdot 2 \cdot (s^2+9) \cdot 2s}{(s^2+9)^2} = 18\frac{s^2-3}{(s^2+9)^3}$$

$$\left(\frac{3}{s^2+9}\right)''' = 18\left(\frac{s^2-3}{(s^2+9)^3}\right)' = \ldots = (-72)\frac{s(s^2-9)}{(s^2+9)^4}$$

Prema tome

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 216 \cdot \frac{s(s^2-9)}{(s^2+9)^4} + \frac{4}{(s+4)^3}$$

(#) Dva prijatelja ugovorila su sastanak na određenom mjestu u određen dan između 10 i 11 sati. Onaj koji prvi dođe čekaće 15 minuta, poslije čega odlazi. Kolika je vjerovatnoća da će se prijatelji susresti?

Rj.

Sa x označimo minute dolaska prvog prijatelja a sa y minute dolaska drugog prijatelja. Tako npr. ako je $x=15$ to znači da je prvi prijatelj došao u 10:15, a ako je $x=20, y=25$ to znači da je prvi prijatelj došao u 10:20 a drugi prijatelj došao u 10:25.

Posmatrajmo sljedećih nekoliko slučajeva

$x=0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 15$

$x=5 \Rightarrow 0 \leq y \leq 20$

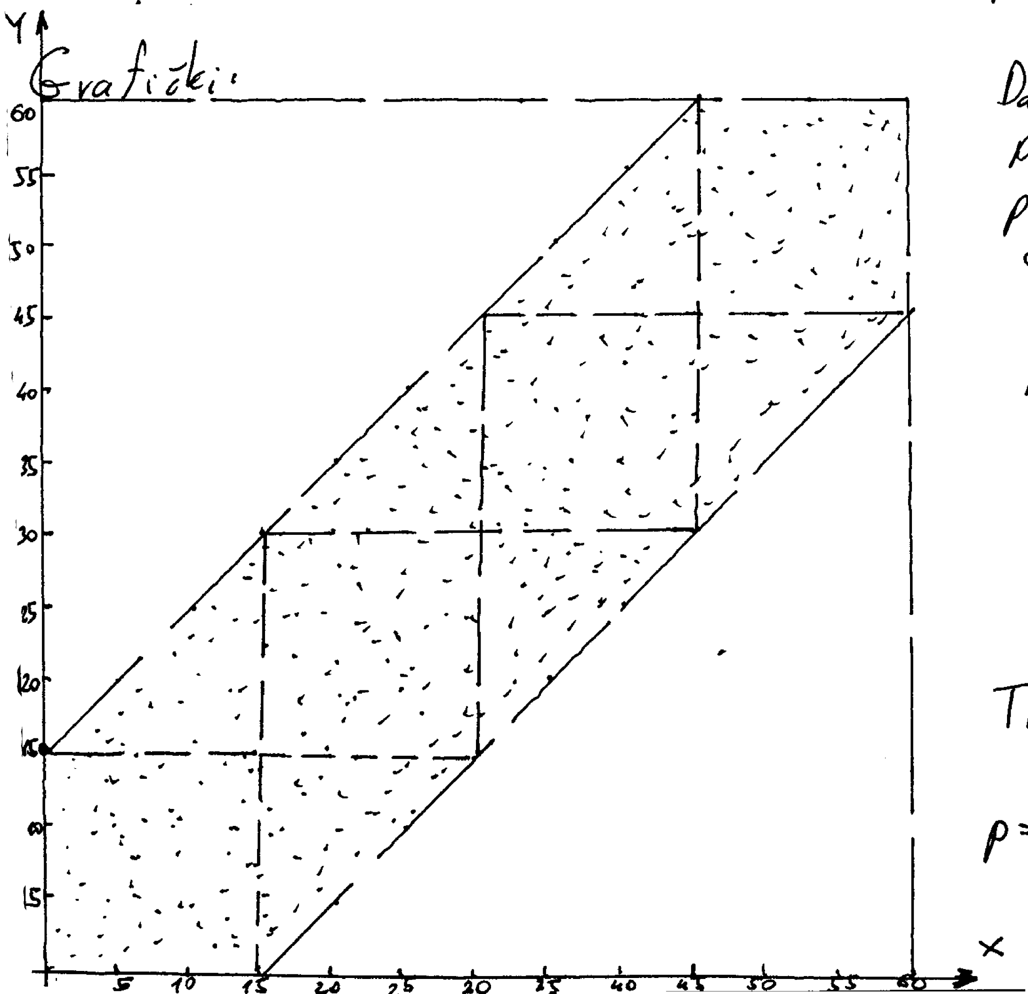
$x=10 \Rightarrow 0 \leq y \leq 25$

$x=15 \Rightarrow 0 \leq y \leq 30$

$x=20 \Rightarrow 0 \leq y \leq 35$

$x=60 \Rightarrow 45 \leq y \leq 60$

Grafički:



Da bi riješili zadatak potrebno je još pronaći površinu ištačkanog dijela na slici kao i površinu čitavog kvadrata. Površina kvadrata je 60^2. Površina ištačkanog dijela je

$$4 \cdot 15^2 + 6 \cdot \frac{15^2}{2} = 7 \cdot 15^2$$

Tražena vjerovatnoća je

$$p = \frac{7 \cdot \cancel{15} \cdot \cancel{15}}{\cancel{60} \cdot \cancel{60}} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

(#) Pretpostavimo da, ako je emitovan signal intenziteta μ sa određene zvijezde, da vrijednost koja je primljena na poziciji opažanja na zemlji je normalna slučajna varijabla sa sredinom μ i standardnom devijacijom 4. Drugim riječima, vrijednost emitovanog signala je promjenjena pomoću slučajnog šuma, koji ima normalnu distribuciju sa sredinom 0 i standardnom devijacijom 4. Pretpostavljeno je, da je intenzitet signala jednak 10.

(a) Testirati da li je hipoteza vjerodostojna ako je isti signal nezavisno primljen 20 puta i od 20 dobijenih vrijednosti dobijeni prosjek je 11,6. Koristiti 5 postotni nivo značajnosti.

(b) Pretpostavimo da je prosjek od 20 vrijednosti jednak 19,8. Odrediti p vrijednost i objasniti za koje nivoe značajnosti H_0 neće biti odbačena. Isto ovo sprovesti kada je sredina uzorka 7,8.

Rj.

(a) Iz pretpostavke zadatka nulta hipoteza je

$$H_0 : \mu = 10$$

dok je njezina alternativa

$$H_1 : \mu \neq 10$$

Želimo koristiti 5% nivo značajnosti, tj. $\alpha = 0{,}05$.

$z_{0,05} = ?$

$$P\{Z < z_{0,05}\} = 1 - P\{Z > z_{0,05}\} = 0{,}95$$

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z < 1{,}64\} = 0{,}9495 \\ P\{Z < 1{,}65\} = 0{,}9505 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{0,05} = 1{,}645$$

Prisjetimo se:

H_0	H_1	Test statistika (TS)	Test α-nivoa značajnosti
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}$	$\begin{cases}\text{odbaci } H_0, \text{ ako je } \lvert TS\rvert \geq z_{\alpha/2}\\ \text{nemoj odbaciti, u suprotnom}\end{cases}$

p vrijednost ako je $TS=v$

$$2P\{Z\geq |v|\}.$$

Prema tome nama treba $z_{0,025}$ $(=z_{\alpha/2})$

$z_{0,025}=?$

$$P\{Z<z_{0,025}\}=1-P\{Z>z_{0,025}\}=0,975 \overset{\text{iz Tabele}}{\Rightarrow} z_{0,025}=1,96$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0|=\frac{\sqrt{20}}{4}|11,6-10|=1,79$$

Kako je ova vrijednost manja od 1,79, data hipoteza je vjerodostojna.

(b) Pretpostavimo da je $\overline{X}=10,8$. Apsolutna vrijednost test statistike je

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X}-\mu_0|=\frac{\sqrt{20}}{4}|10,8-10|=0,894$$

Kako je $P\{|Z|\geq 0,894\}=2P\{Z\geq 0,894\}=2(1-P\{Z\leq 0,894\})=$
$=2(1-0,8143)=0,371$ (iz tabele)

slijedi da je $p=0,371$ $\Rightarrow$ nulta hipoteza neće biti odbačena na bilo kojem nivou značajnosti manjem od 0,371.

Za $\overline{X}=7,8$ $\overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\Longrightarrow}$ p vrijednost $=0,014$.